
1.4 ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$

1.4 ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$

Εισαγωγή

Η έννοια του ορίου γεννήθηκε στην προσπάθεια των μαθηματικών να απαντήσουν σε ερωτήματα όπως:

- Τι ονομάζουμε στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού;
- Τι ονομάζουμε εφαπτομένη μιας καμπύλης σε ένα σημείο της;
- Τι ονομάζουμε εμβαδό ενός μικτόγραμμου χωρίου;

Στις παραγράφους που ακολουθούν, αρχικά προσεγγίζουμε την έννοια του ορίου “διαισθητικά”, στη συνέχεια διατυπώνουμε τον αυστηρό μαθηματικό ορισμό του ορίου και μερικές βασικές ιδιότητές του και τέλος, εισάγουμε την έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης.

Η έννοια του ορίου

- Έστω η συνάρτηση

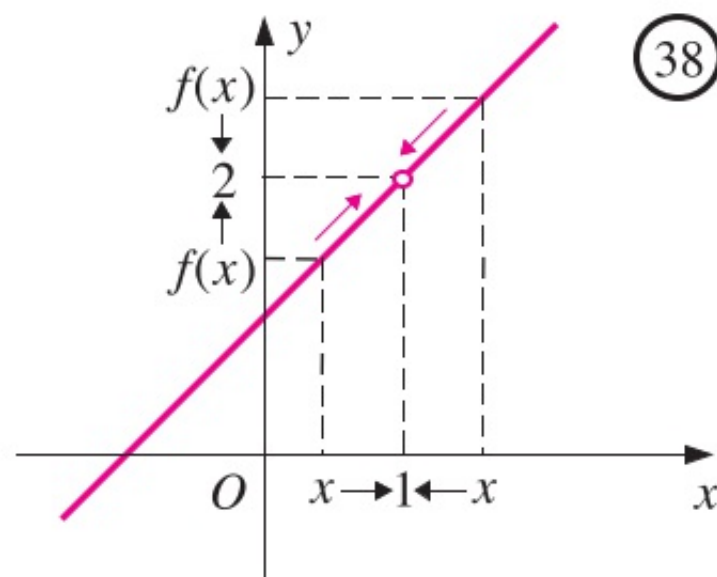
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Η συνάρτηση αυτή έχει πεδίο ορισμού το σύνολο

$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ και γράφεται

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1, x \neq 1.$$

Επομένως, η γραφική της παράσταση είναι η ευθεία $y = x + 1$ με εξαίρεση το σημείο $A(1,2)$ (Σχ. 38). Στο σχήμα αυτό, παρατηρούμε ότι:



“Καθώς το x , κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα $x'x$, προσεγγίζει τον πραγματικό αριθμό 1, το $f(x)$, κινούμενο πάνω στον άξονα $y'y$, προσεγγίζει τον πραγματικό αριθμό 2. Και μάλιστα, οι τιμές $f(x)$ είναι τόσο κοντά στο 2 όσο θέλουμε, για όλα τα $x \neq 1$ που είναι αρκούντως κοντά στο 1”.

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

και διαβάζουμε

“το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο 1, είναι 2”.

Γενικά:

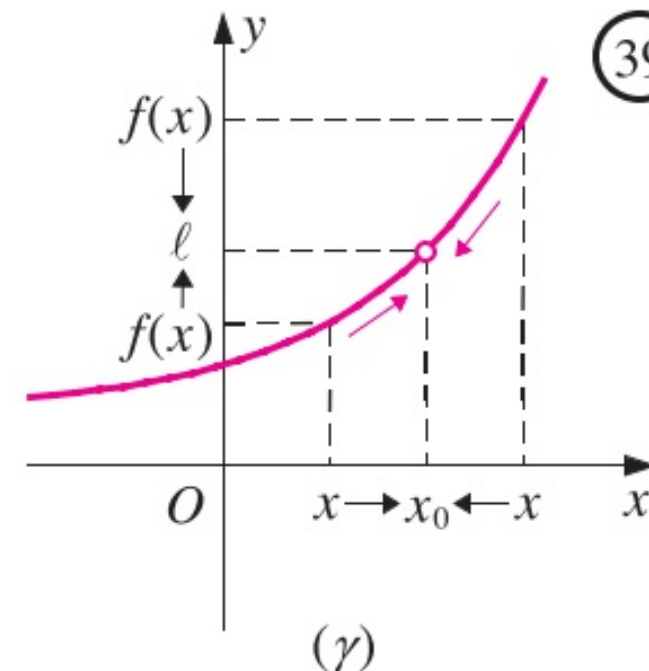
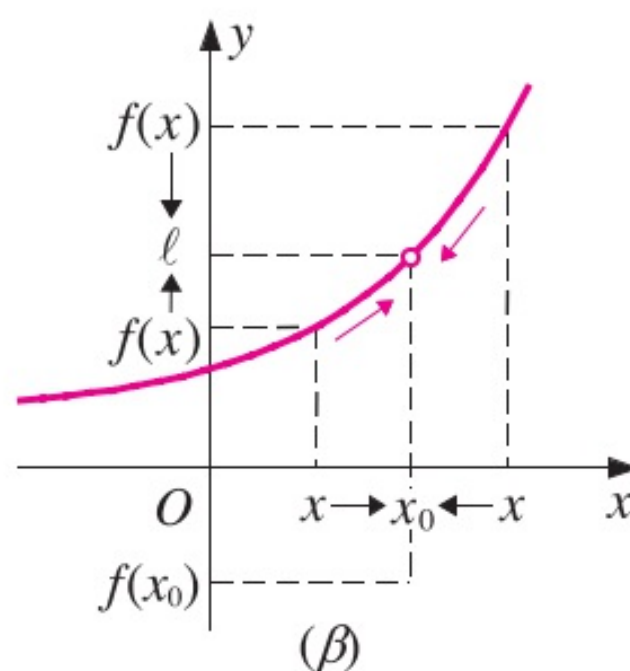
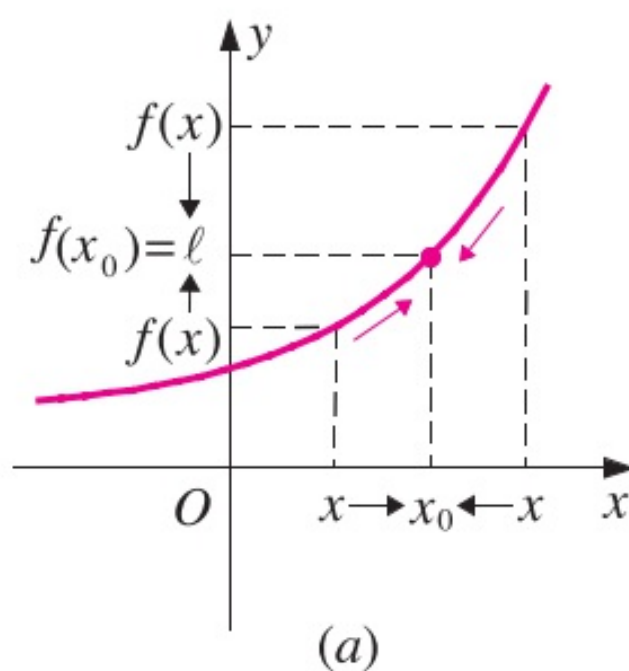
Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ , καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0 , τότε γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

και διαβάζουμε

“το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 , είναι ℓ ” ή

“το όριο της $f(x)$ στο x_0 είναι ℓ ”.



ΣΧΟΛΙΟ

Από τα παραπάνω σχήματα παρατηρούμε ότι:

— Για να αναζητήσουμε το όριο της f στο x_0 , πρέπει η f να ορίζεται όσο θέλουμε “κοντά στο x_0 ”, δηλαδή η f να είναι ορισμένη σ’ ένα σύνολο της μορφής

$$(a, x_0) \cup (x_0, \beta) \text{ ή } (a, x_0) \text{ ή } (x_0, \beta).$$

— Το x_0 μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης (Σχ. 39α, 39β) ή να μην ανήκει σ’ αυτό (Σχ. 39γ).

— Η τιμή της f στο x_0 , όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριό της στο x_0 (Σχ. 39α) ή διαφορετική από αυτό. (Σχ. 39β).

• Έστω, τώρα, η συνάρτηση

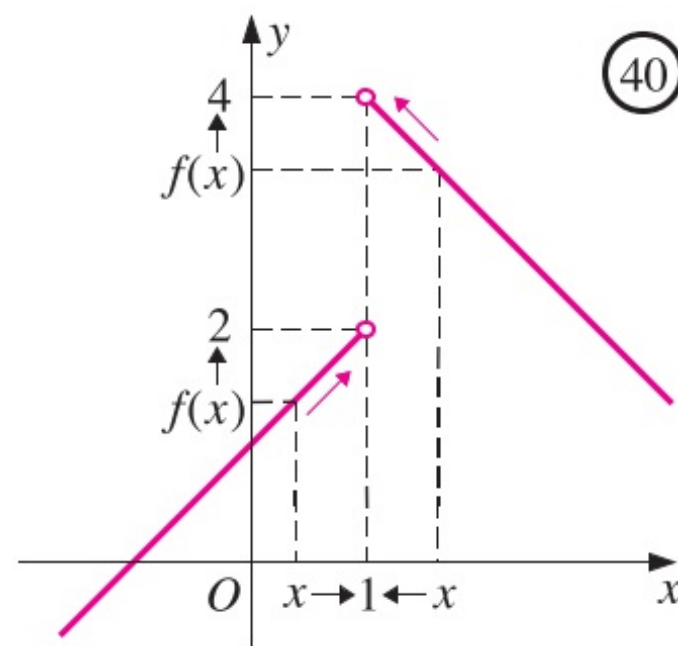
$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 1 \\ -x+5, & x > 1 \end{cases},$$

της οποίας η γραφική παράσταση αποτελείται από τις ημιευθείες του διπλανού σχήματος.

Παρατηρούμε ότι:

— Όταν το x προσεγγίζει το 1 από αριστερά ($x < 1$), τότε οι τιμές της f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό 2. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2.$$



— Όταν το x προσεγγίζει το 1 από δεξιά ($x > 1$), τότε οι τιμές της f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό 4. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4.$$

Γενικά:

— Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ_1 , καθώς το x προσεγγίζει το x_0 από μικρότερες τιμές ($x < x_0$), τότε γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell_1$$

και διαβάζουμε:

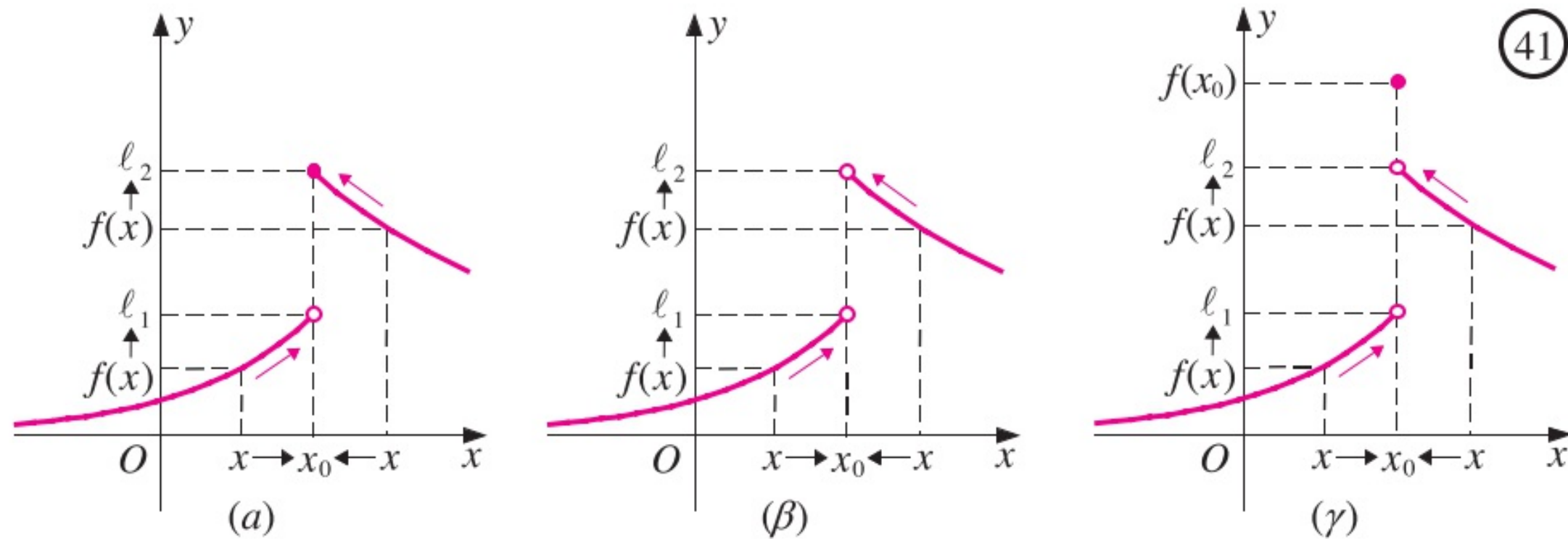
“το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 από τα αριστερά, είναι ℓ_1 ”.

— Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ_2 , καθώς το x προσεγγίζει το x_0 από μεγαλύτερες τιμές ($x > x_0$), τότε γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell_2$$

και διαβάζουμε:

“το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 από τα δεξιά, είναι ℓ_2 ”.



Τους αριθμούς $\ell_1 = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ και $\ell_2 = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ τους λέμε **πλευρικά όρια** της f στο x_0

και συγκεκριμένα το ℓ_1 **αριστερό όριο** της f στο x_0 , ενώ το ℓ_2 **δεξιό όριο** της f στο x_0 .

Από τα παραπάνω σχήματα φαίνεται ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell, \text{ αν και μόνο αν } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x|}{x}$ (Σχ. 42) δεν έχει όριο στο $x_0 = 0$, αφού:

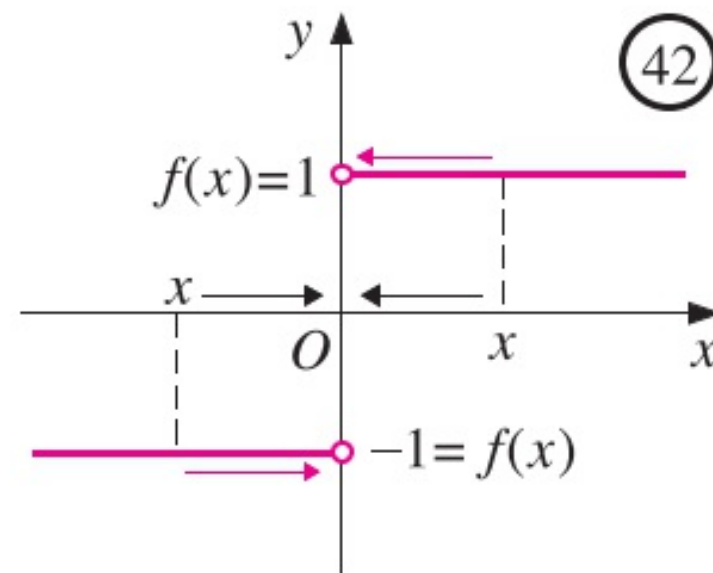
— για $x < 0$ είναι $f(x) = \frac{-x}{x} = -1$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$,

ενώ

— για $x > 0$ είναι $f(x) = \frac{x}{x} = 1$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$,

και έτσι

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$



Ορισμός του ορίου στο $x_0 \in \mathbb{R}$

• Στα προηγούμενα γνωρίσαμε την έννοια του ορίου διαισθητικά. Είδαμε ότι, όταν γράφουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, εννοούμε ότι οι τιμές $f(x)$ βρίσκονται όσο θέλουμε κοντά στο ℓ ,

για όλα τα $x \neq x_0$ τα οποία βρίσκονται “αρκούντως κοντά στο x_0 ”. Για να διατυπώσουμε, τώρα, τα παραπάνω σε μαθηματική γλώσσα εργαζόμαστε ως εξής:

— Στη θέση της φράσης “οι τιμές $f(x)$ βρίσκονται οσοδήποτε θέλουμε κοντά στο ℓ ” χρησιμοποιούμε την ανισότητα

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon, \quad (1)$$

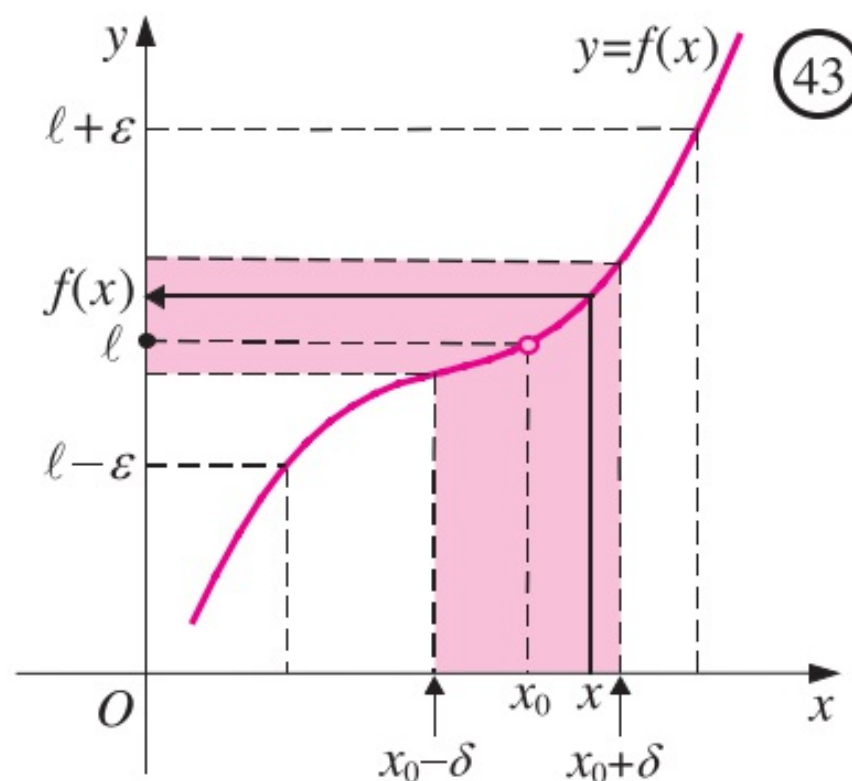
όπου ε οποιοσδήποτε θετικός αριθμός.

— Στη θέση της φράσης “για όλα τα $x \neq x_0$ που βρίσκονται αρκούντως κοντά στο x_0 ” χρησιμοποιούμε την ανισότητα

$$0 < |x - x_0| < \delta, \quad (2)$$

όπου δ είναι ένας αρκούντως μικρός θετικός αριθμός. (Η ανισότητα $0 < |x - x_0|$ δηλώνει ότι $x \neq x_0$).

— Για να συνδέσουμε τις δυο αυτές φράσεις σύμφωνα με τον διαισθητικό ορισμό λέμε ότι για οποιονδήποτε θετικό αριθμό ε μπορούμε να βρούμε έναν θετικό αριθμό δ τέτοιον ώστε, αν το x ικανοποιεί τη (2), τότε το $f(x)$ θα ικανοποιεί την (1). Έχουμε δηλαδή τον ακόλουθο ορισμό:



ΟΡΙΣΜΟΣ*

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Θα λέμε ότι η f έχει στο x_0 όριο $\ell \in \mathbb{R}$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος, ώστε για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, με $0 < |x - x_0| < \delta$, να ισχύει:

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Αποδεικνύεται ότι, αν μια συνάρτηση f έχει όριο στο x_0 , τότε αυτό είναι μοναδικό και συμβολίζεται, όπως είδαμε, με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Στη συνέχεια, όταν γράφουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, θα εννοούμε ότι υπάρχει το όριο της f στο x_0 και είναι ίσο με ℓ .

Συνέπεια του παραπάνω ορισμού είναι οι ακόλουθες ισοδυναμίες:

$$(\alpha) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell) = 0$$

$$(\beta) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \ell$$

• Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (x_0, β) και την ανισότητα $0 < |x - x_0| < \delta$ την αντικαταστήσουμε με την $x_0 < x < x_0 + \delta$, τότε έχουμε τον ορισμό του $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, ενώ αν η f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (α, x_0) και

την ανισότητα $0 < |x - x_0| < \delta$ την αντικαταστήσουμε με την $x_0 - \delta < x < x_0$, τότε έχουμε τον ορισμό του $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.

Αποδεικνύεται ότι:

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

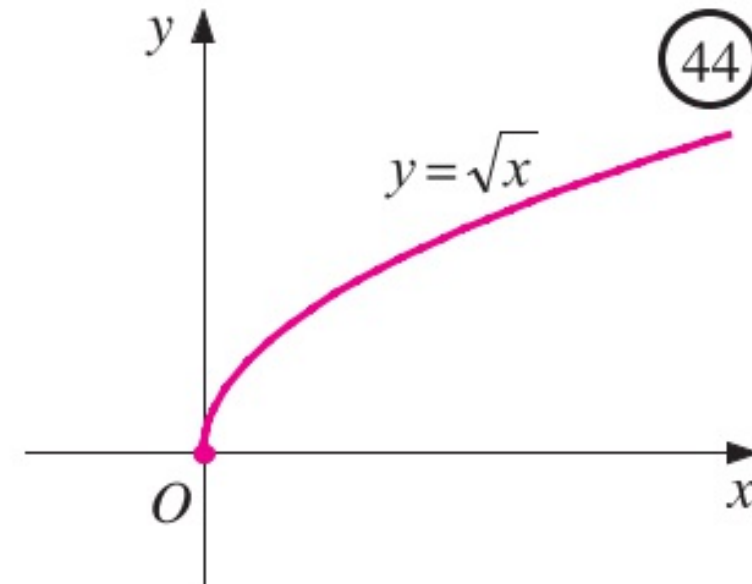
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$$

• Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (x_0, β) , αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (α, x_0) , τότε ορίζουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0 \quad (\text{Σχ. 44})$$

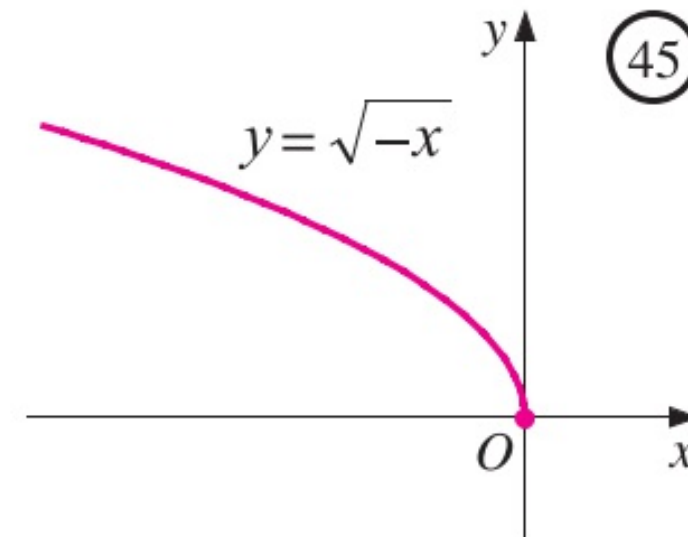


• Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (α, x_0) , αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (x_0, β) , τότε ορίζουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$$

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{-x} = 0 \quad (\Sigma\chi. 45)$$



ΣΧΟΛΙΟ

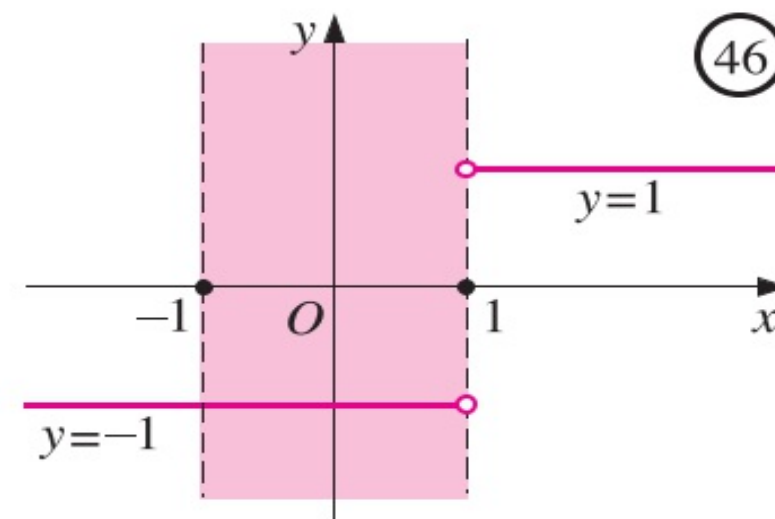
Αποδεικνύεται ότι το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ είναι ανεξάρτητο των άκρων α, β των διαστημάτων (α, x_0) και (x_0, β) στα οποία θεωρούμε ότι είναι ορισμένη η f .

Έτσι για παράδειγμα, αν θέλουμε να βρούμε το όριο της συνάρτησης $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$ στο $x_0 = 0$, περιοριζό-

μαστε στο υποσύνολο $(-1, 0) \cup (0, 1)$ του πεδίου ορισμού της, στο οποίο αυτή παίρνει τη μορφή

$$f(x) = \frac{-(x-1)}{x-1} = -1.$$

Επομένως, όπως φαίνεται και από το διπλανό σχήμα, το ζητούμενο όριο είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$.



ΣΥΜΒΑΣΗ

Στη συνέχεια, όταν λέμε ότι μια συνάρτηση f έχει **κοντά στο x_0** μια ιδιότητα P θα εννοούμε ότι ισχύει μια από τις παρακάτω τρεις συνθήκες:

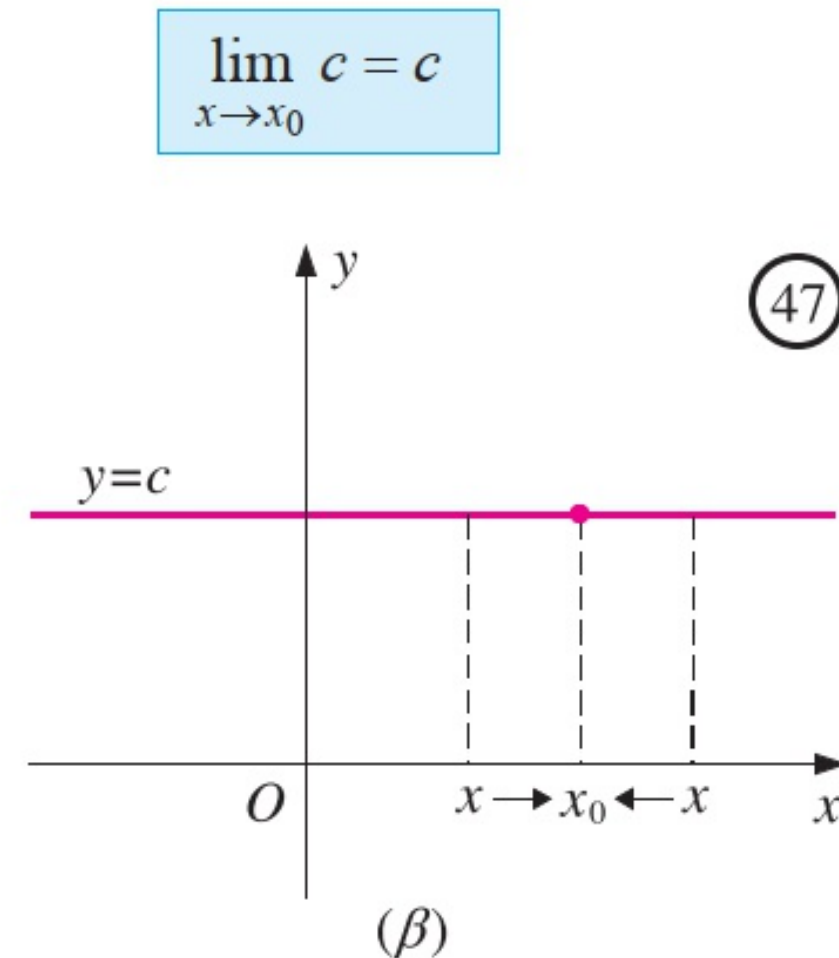
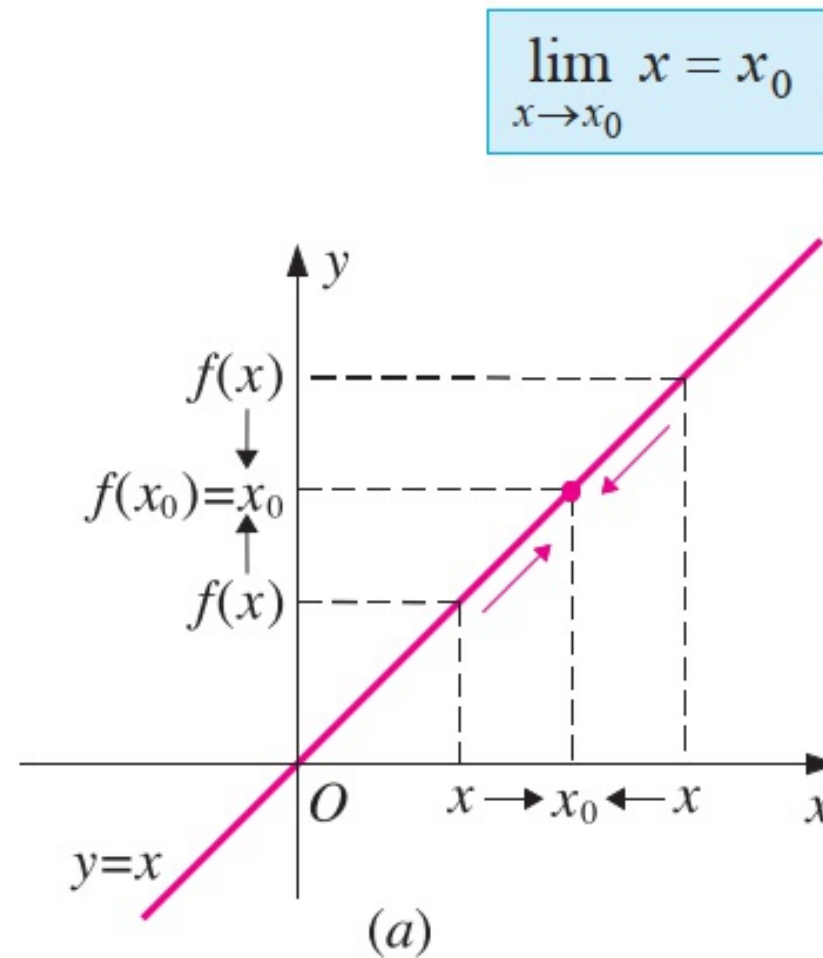
- (α) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και στο σύνολο αυτό έχει την ιδιότητα P .
- (β) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (α, x_0) , έχει σ' αυτό την ιδιότητα P , αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (x_0, β) .
- (γ) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (x_0, β) , έχει σ' αυτό την ιδιότητα P , αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (α, x_0) .

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$ είναι θετική κοντά στο $x_0 = 0$, αφού ορίζεται

στο σύνολο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και είναι θετική σε αυτό.

Όριο ταυτοτικής - σταθερής συνάρτησης

Με τη βοήθεια του ορισμού του ορίου αποδεικνύεται ότι:



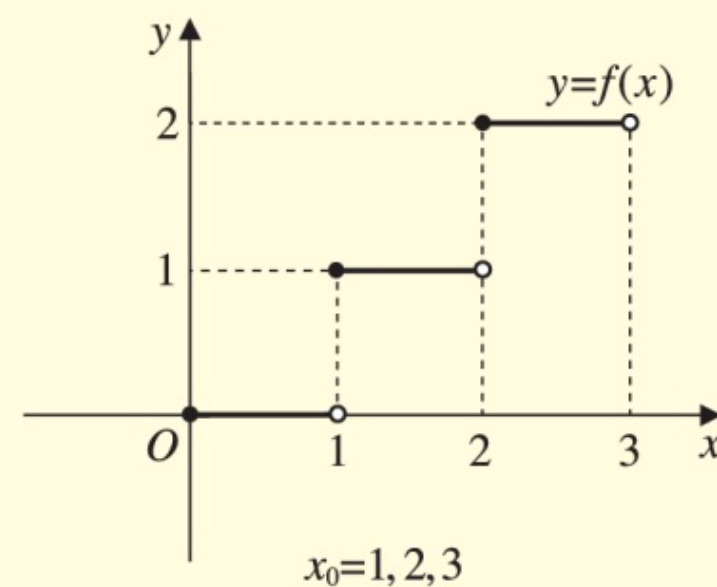
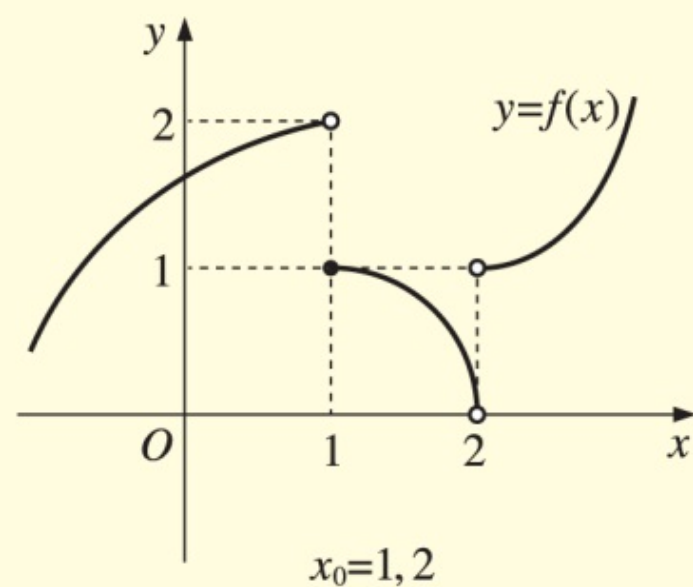
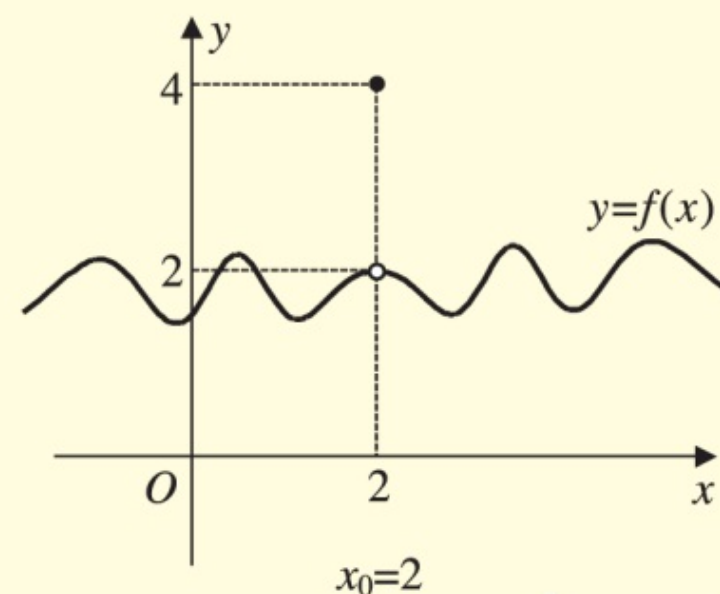
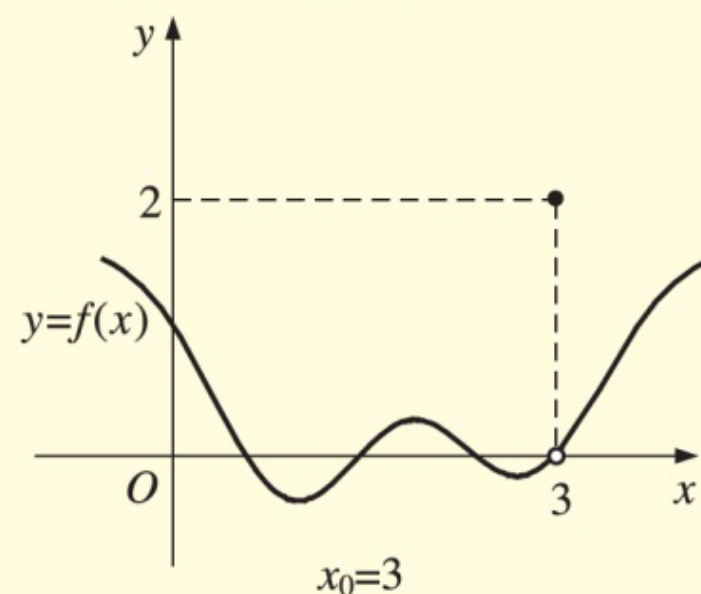
47

Η πρώτη ισότητα δηλώνει ότι το όριο της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$ (Σχ. 47α) στο x_0 είναι ίσο με την τιμή της στο x_0 , ενώ η δεύτερη ισότητα δηλώνει ότι το όριο της σταθερής συνάρτησης $g(x) = c$ (Σχ. 47β) στο x_0 είναι ίσο με c .

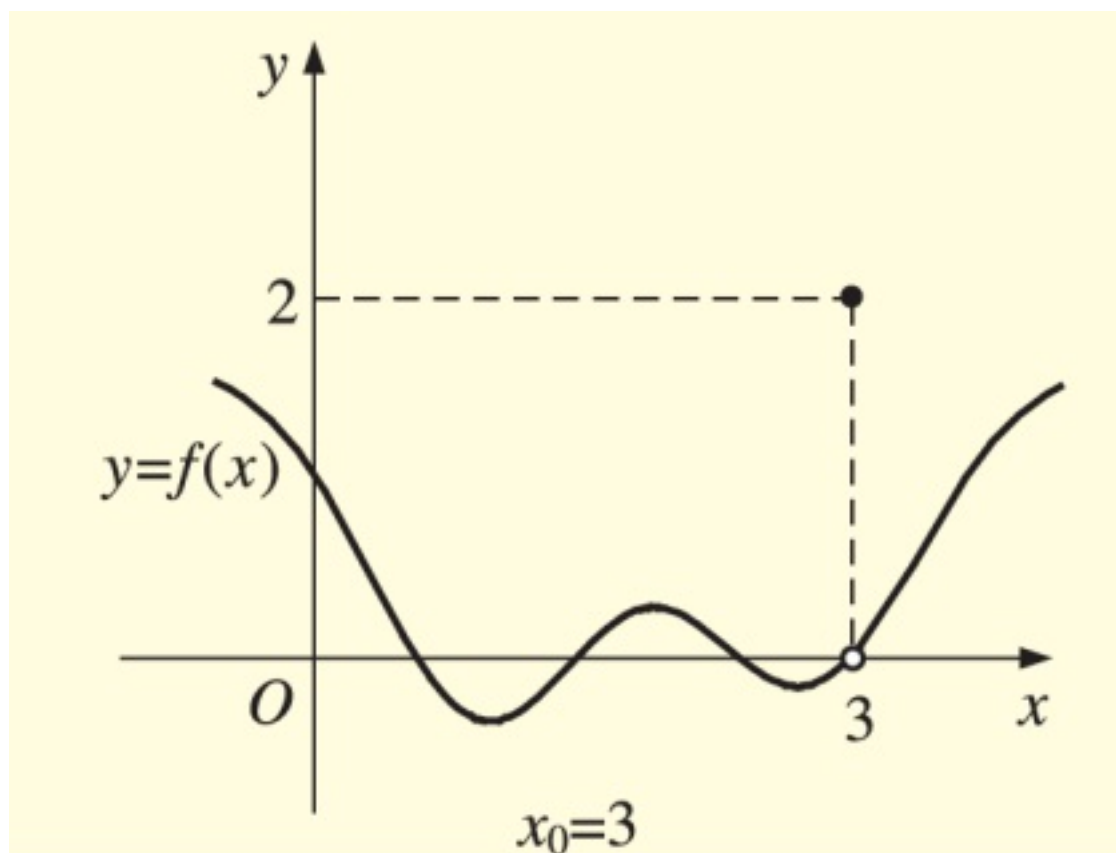
1.4 ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$

Α' ΟΜΑΔΑΣ

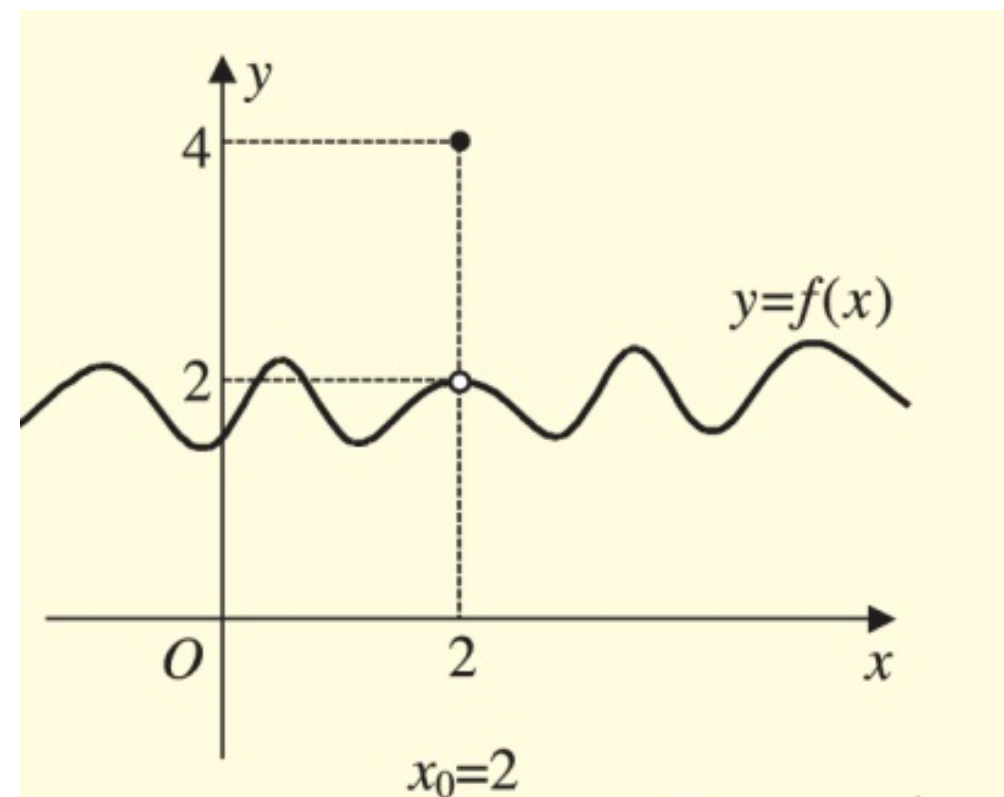
1. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και το $f(x_0)$, εφόσον υπάρχουν, όταν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι:



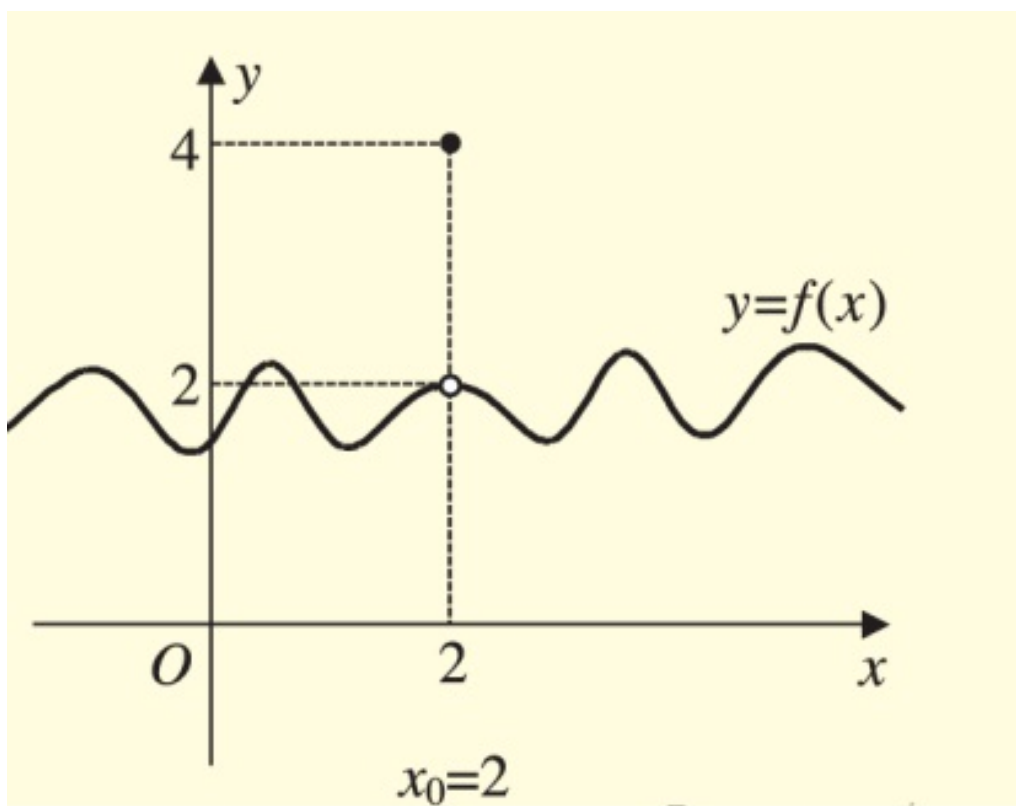
1. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και το $f(x_0)$, εφόσον υπάρχουν, όταν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι:



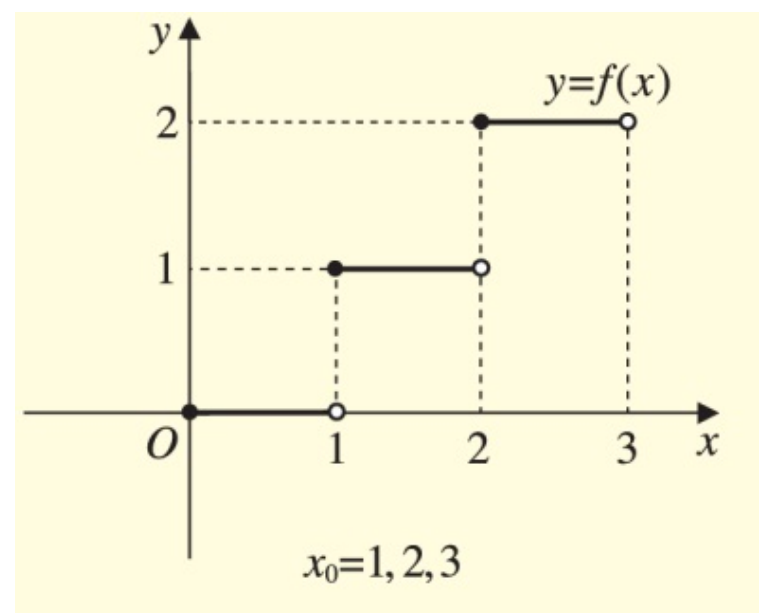
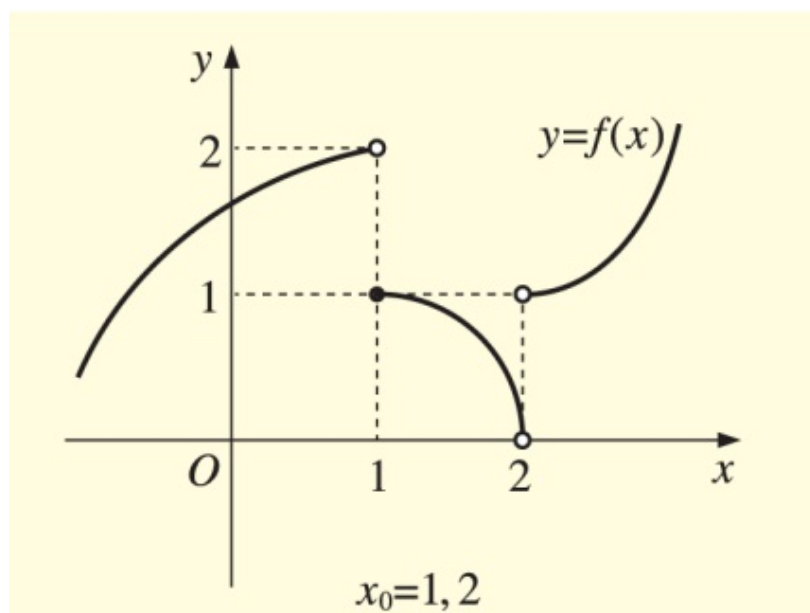
$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0 \text{ και } f(3) = 2$$



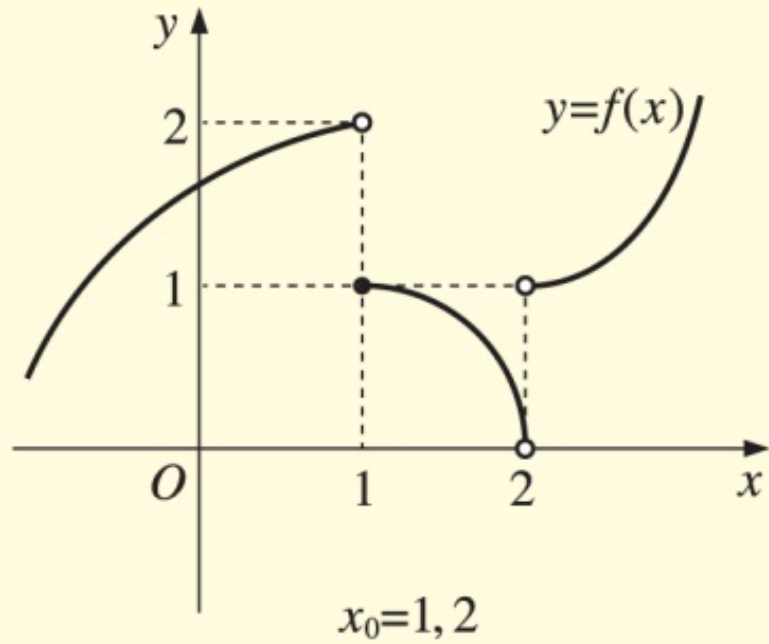
1. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και το $f(x_0)$, εφόσον υπάρχουν, όταν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι:



$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 \text{ και } f(2) = 4$$



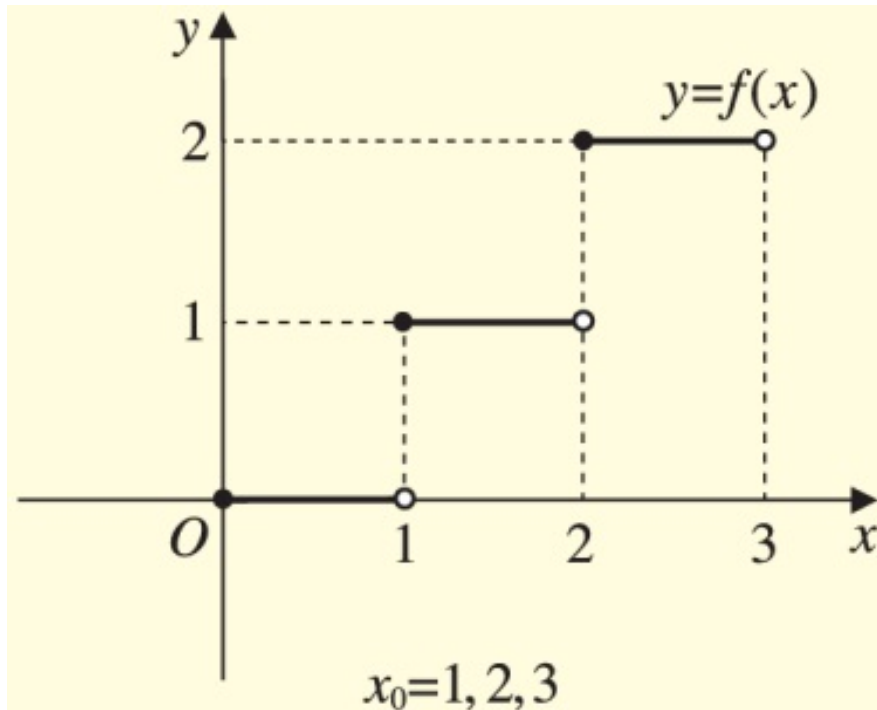
1. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και το $f(x_0)$, εφόσον υπάρχουν, όταν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι:



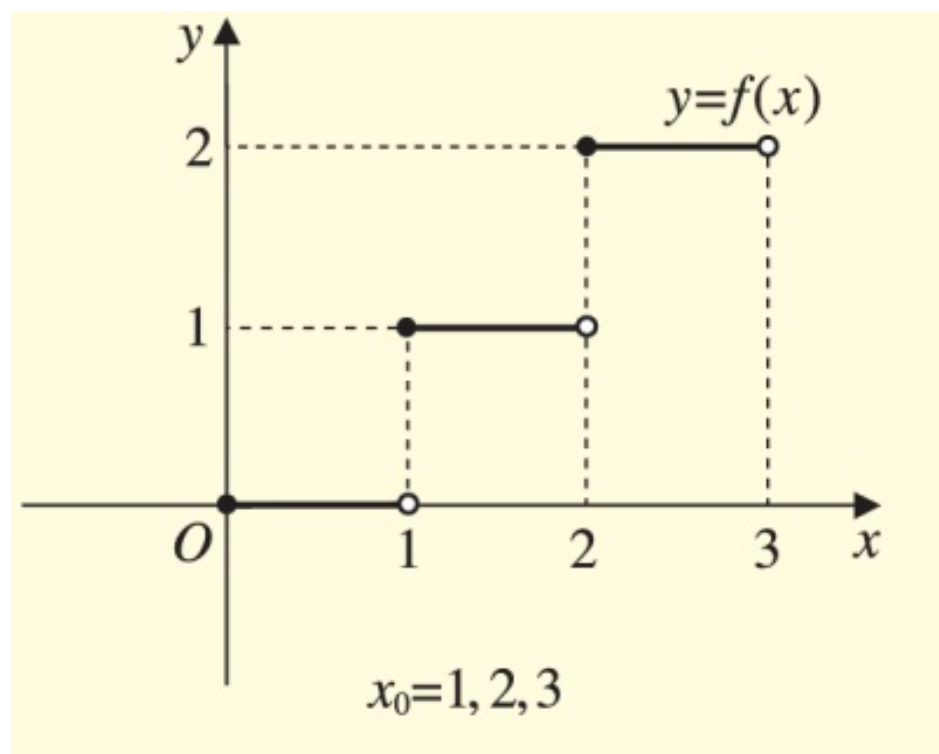
• $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$, οπότε η f δεν έχει όριο στο 1, ενώ είναι $f(1) = 1$.

• $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$, οπότε η f δεν έχει όριο στο 2.

Επιπλέον, η f δεν ορίζεται στο 2.



1. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και το $f(x_0)$, εφόσον υπάρχουν, όταν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι:



- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$, οπότε η f δεν έχει όριο στο 1, ενώ είναι $f(1) = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$, οπότε η f δεν έχει όριο στο 2, ενώ είναι $f(2) = 2$.
- $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$, ενώ η f δεν ορίζεται στο 3.

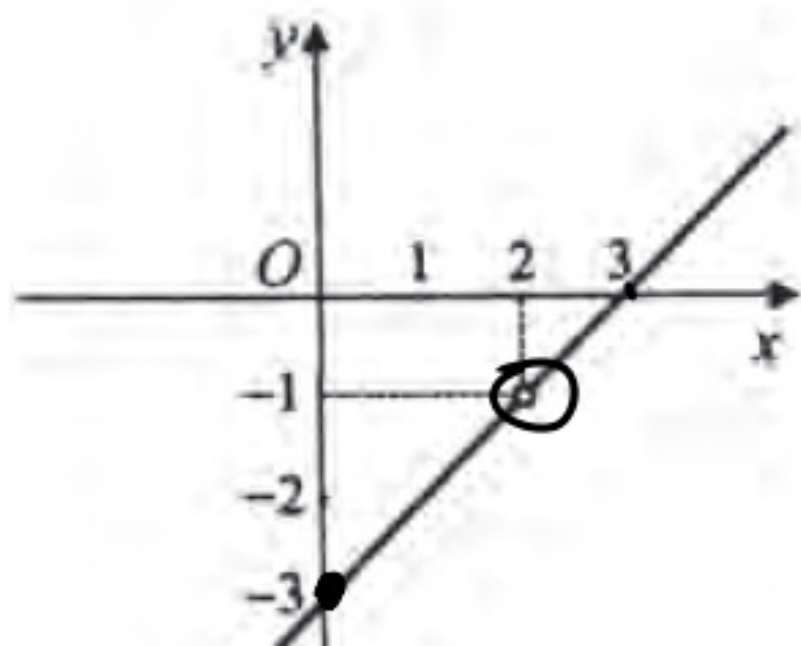
2. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και με τη βοήθεια αυτής να βρείτε, εφόσον υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, όταν:

$$\text{i) } f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}, \quad x_0 = 2 \qquad \text{ii) } f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1$$

$$\text{iii) } f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ -x + 1, & x > 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1 \qquad \text{iv) } f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}, \quad x_0 = 0.$$

2. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και με τη βοήθεια αυτής να βρείτε, εφόσον υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, όταν:

i) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$, $x_0 = 2$



i) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{2\}$ και γράφεται

$$f(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = x-3.$$

Από τη γραφική παράσταση της f (διπλανό σχήμα) βρίσκουμε: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$.

x	2	3
$f(x)$	-1	0

ii) $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$

2. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και με τη βοήθεια αυτής να βρείτε, εφόσον υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, όταν:

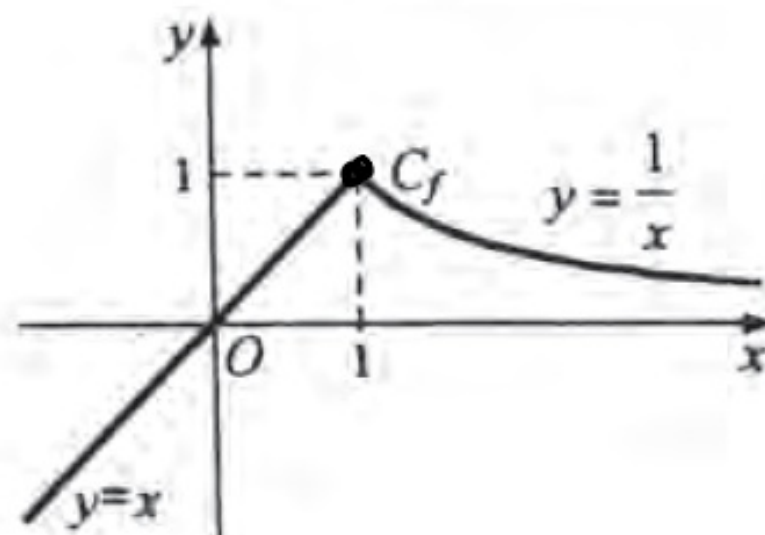
$$A = \mathbb{R}$$

$$\text{ii) } f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1$$

$$f(x) = x, \quad x \leq 1$$

x	0	1
$f(x)$	0	1

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$



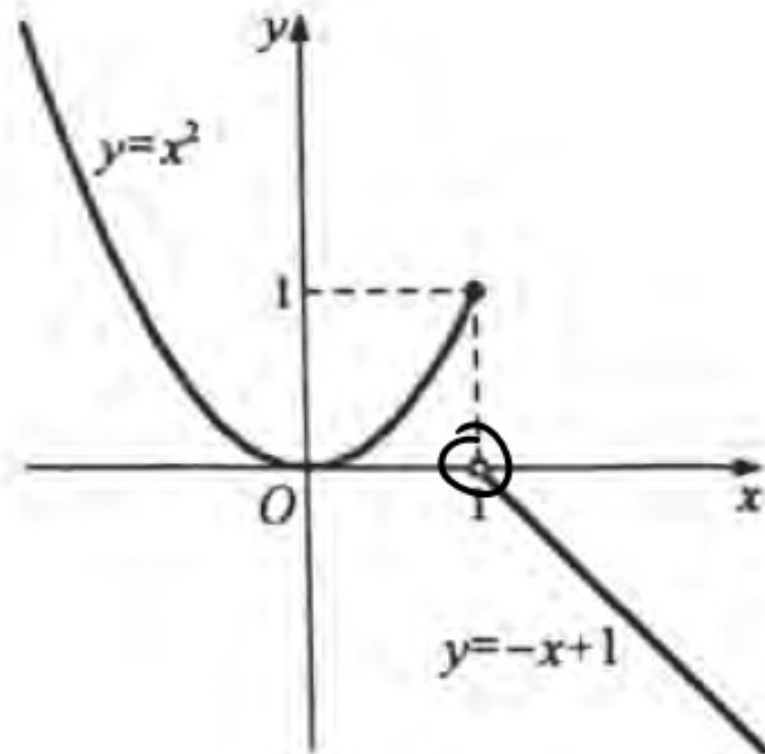
$$\text{iii) } f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ -x + 1, & x > 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1$$

2. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και με τη βοήθεια αυτής να βρείτε, εφόσον υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, όταν:

$$\text{iii) } f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ -x+1, & x > 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} -x+1, & x > 1 \end{cases}$$

x	2	1
$f(x)$	-1	0



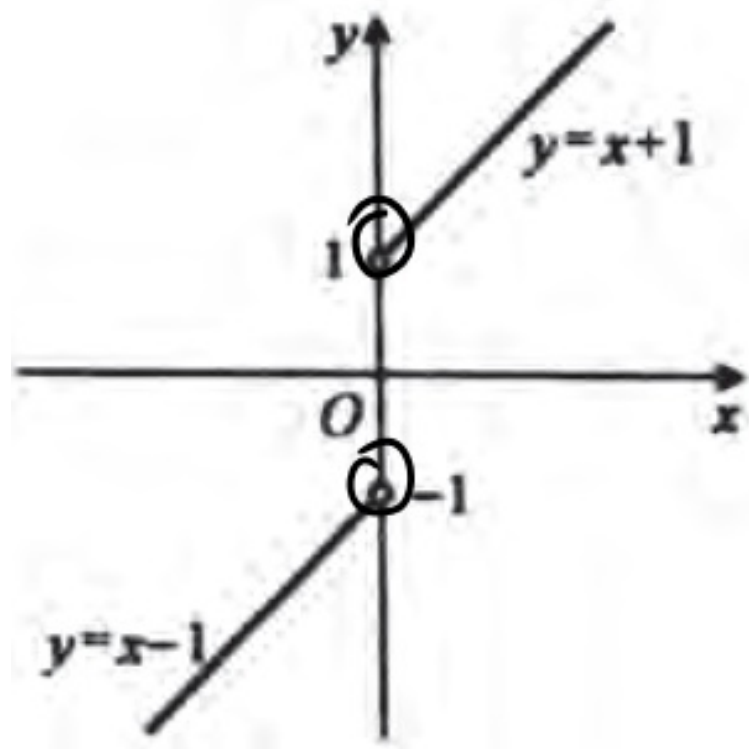
$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$, οπότε, η f δεν έχει όριο στο $x_0 = 1$.

$$\text{iv) } f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}, \quad x_0 = 0.$$

2. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και με τη βοήθεια αυτής να βρείτε, εφόσον υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, όταν:

iv) $f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$, $x_0 = 0$.

$A = \mathbb{R}^*$



Η συνάρτηση f στο πεδίο ορισμού της $\mathbb{R} - \{0\}$ γράφεται

$$f(x) = x + \frac{|x|}{x} = \begin{cases} x + \frac{x}{x} & , x > 0 \\ x - \frac{x}{x} & , x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x + 1, & x > 0 \\ x - 1, & x < 0 \end{cases}$$

x	0	1
$f(x)$	1	2

x	0	-1
$f(x)$	-1	-2

οπότε από τη γραφική παράσταση της f C_f (διπλανό σχήμα) βρίσκουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1.$$

Επομένως, η f δεν έχει όριο στο $x_0 = 0$.

3. Ομοίως όταν:

$$\text{i) } f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 - 1}, \quad x_0 = 1 \text{ ή } x_0 = -1$$

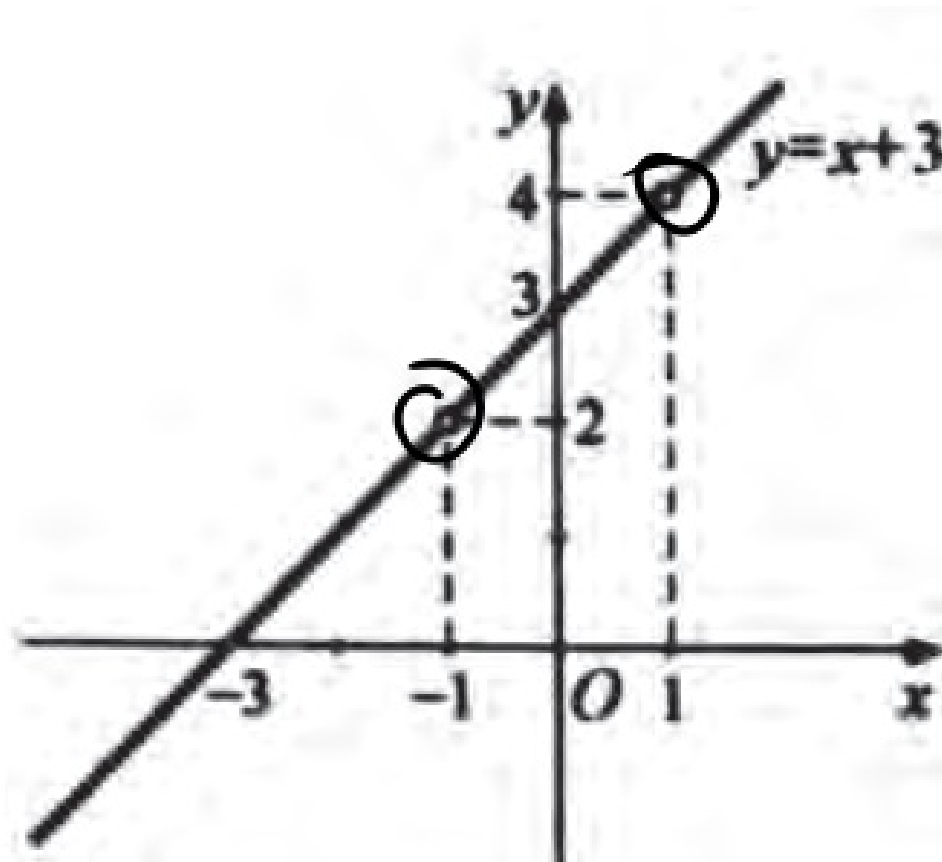
$$\text{ii) } f(x) = \frac{(x+1)\sqrt{9x^2 - 6x + 1}}{3x - 1}, \quad x_0 = \frac{1}{3}.$$

3. Ομοίως όταν:

i) $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 - 1}$, $x_0 = 1$ ή $x_0 = -1$

$$x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1 \quad A = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 - 1} = \frac{x^2(x+3) - (x+3)}{x^2 - 1} = \frac{(x+3)(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = x+3, \quad x \in A$$



x	0	-3
$f(x)$	3	0

Από τη γραφική παράσταση της f που φαίνεται στο διπλανό σχήμα βρίσκουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4.$$

ii) $f(x) = \frac{(x+1)\sqrt{9x^2 - 6x + 1}}{3x - 1}$, $x_0 = \frac{1}{3}$.

3. Ομοίως όταν:

$$\text{ii) } f(x) = \frac{(x+1)\sqrt{9x^2 - 6x + 1}}{3x-1}, \quad x_0 = \frac{1}{3}.$$

$$3x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{3}$$

$$A = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{3} \right\}$$

$$\begin{aligned} & \text{κ' } 9x^2 - 6x + 1 \geq 0 \\ & \Leftrightarrow (3x-1)^2 \geq 0 \quad | \quad 3x-1 \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{(x+1)\sqrt{9x^2 - 6x + 1}}{3x-1}$$

$$f(x) = \frac{(x+1)\sqrt{(3x-1)^2}}{3x-1} = \frac{(x+1)|3x-1|}{3x-1},$$

$$= \begin{cases} \frac{(x+1)(3x-1)}{3x-1} & , \quad 3x-1 > 0 \\ -\frac{(x+1)(3x-1)}{3x-1} & , \quad 3x-1 < 0 \end{cases}$$

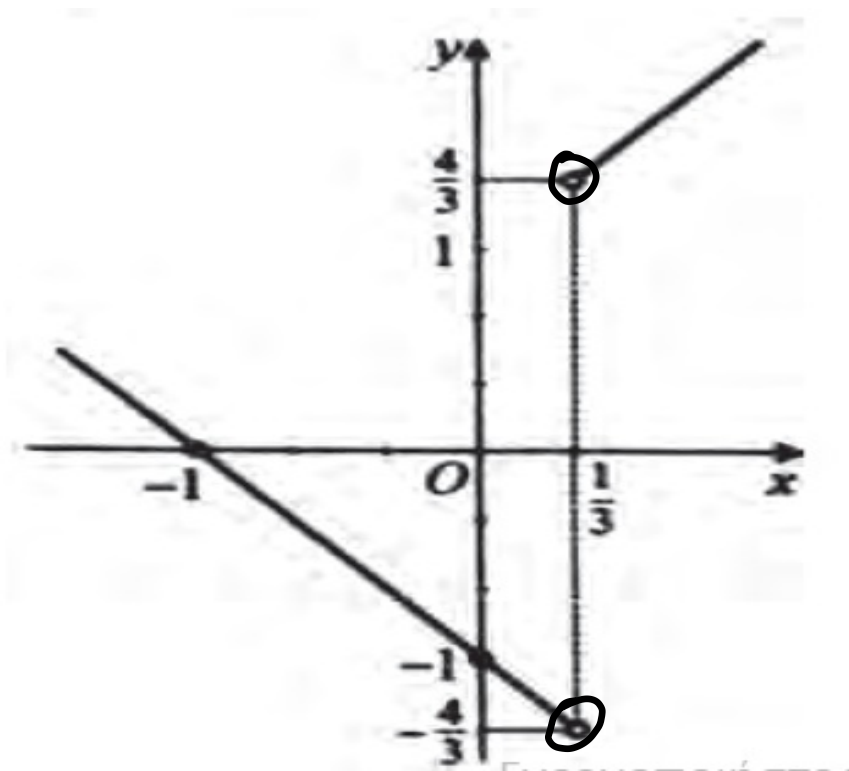
$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x > \frac{1}{3} \\ -x-1, & x < \frac{1}{3} \end{cases}$$

x	$\frac{1}{3}$	1
$f(x)$	$\frac{4}{3}$	2

x	0	$\frac{1}{3}$
$f(x)$	-1	$-\frac{4}{3}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^-} f(x) = -\frac{4}{3} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^+} f(x) = \frac{4}{3}$$

Επομένως, η f δεν έχει όριο στο $x_0 = \frac{1}{3}$.



4. Δίνεται η συνάρτηση f που είναι ορισμένη στο $[-2, +\infty)$ και έχει γραφική παράσταση που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να εξετάσετε ποιοι από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι αληθείς.

i) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2$

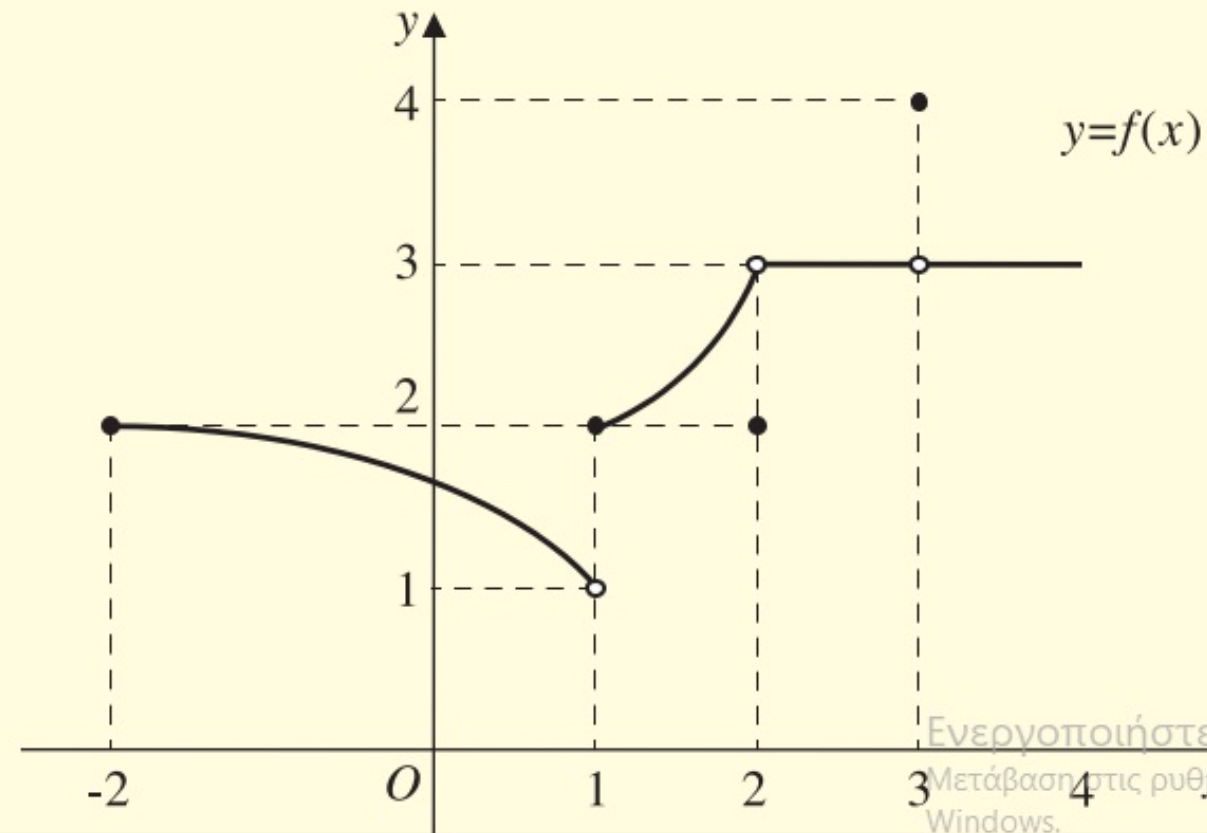
ii) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$

iii) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

iv) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$

v) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4$

vi) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 3$



Ενεργοποιήστε τα
Μετάβαση στις ρυθμίσεις
Windows.

4. Δίνεται η συνάρτηση f που είναι ορισμένη στο $[-2, +\infty)$ και έχει γραφική παράσταση που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να εξετάσετε ποιοι από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι αληθείς.

i) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2$

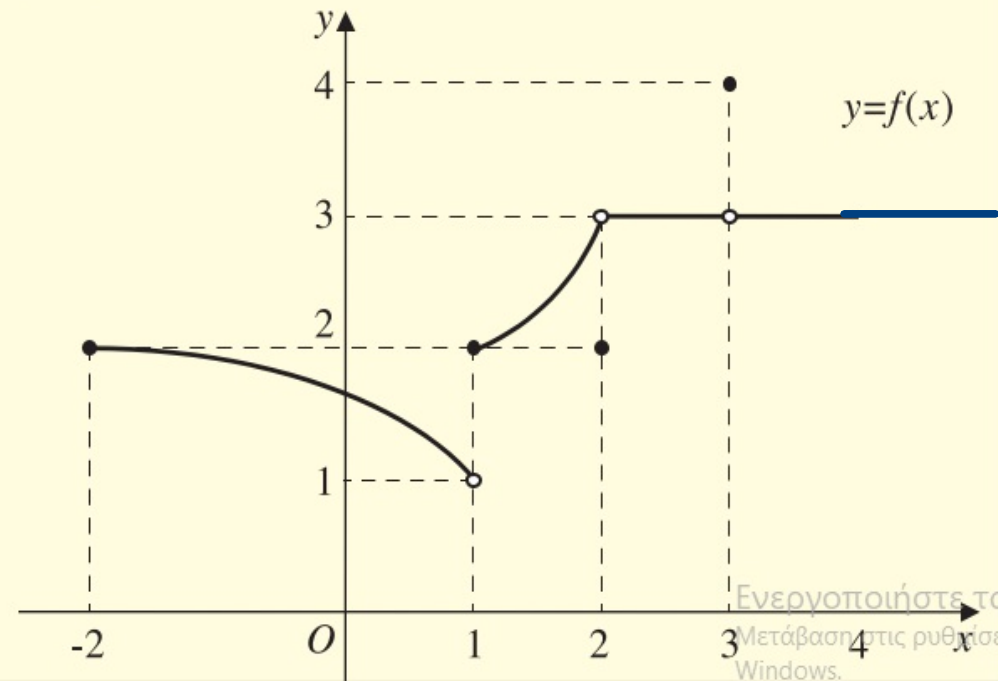
ii) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$

iii) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

iv) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$

v) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4$

vi) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 3$



i) Είναι αληθής, αφού $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 2$.

ii) Δεν είναι αληθής, αφού $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$.

iii) Δεν είναι αληθής, αφού $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$ που σημαίνει ότι η f δεν έχει όριο στο $x_0 = 1$.

iv) Αληθής, αφού $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$.

v) Δεν είναι αληθής, αφού $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3$.

vi) Αληθής, αφού $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 3$.

5. Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, με $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lambda^2 - 6$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lambda$. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

5. Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, με $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lambda^2 - 6$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lambda$. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ υπάρχει, αν και μόνο αν

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \Leftrightarrow \lambda^2 - 6 = \lambda \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

$$\Delta = 25 \quad \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

$$\lambda = 3 \text{ ή } \lambda = -2.$$

7.7 Μια συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού:

$$D_f = (-6, 3] \cup \{5\}$$

Να βρείτε ποια από τα παρακάτω όρια έχει νόημα να αναζητήσουμε:

α) $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$

β) $\lim_{x \rightarrow -6} f(x)$

γ) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

δ) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

ε) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

7.7 Μια συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού:

$$D_f = (-6, 3] \cup \{5\}$$

Να βρείτε ποια από τα παρακάτω όρια έχει νόημα να αναζητήσουμε:

☒ α) $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$

☒ β) $\lim_{x \rightarrow -6} f(x)$

☐ γ) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

☒ δ) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

☐ ε) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

7.8 Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να εξετάσετε αν έχει νόημα ή όχι η αναζήτηση του ορίου $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

α) $f(x) = \frac{x^3 + 5}{x - 2}$ και $x_0 = 2$

β) $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$ και $x_0 = 1$

γ) $f(x) = \sqrt{5 - |2x - 3|}$ και $x_0 = -1$

δ) $f(x) = \sqrt{9 - x^2} + \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ και $x_0 = 3$

7.8 Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να εξετάσετε αν έχει νόημα ή όχι η αναζήτηση του ορίου $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

α) $f(x) = \frac{x^3 + 5}{x - 2}$ και $x_0 = 2$

$$x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$$

$$A = \mathbb{R} - \{2\}$$

NAI

δ) $f(x) = \sqrt{9 - x^2} + \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ και $x_0 = 3$

$$9 - x^2 \geq 0$$

$$x^2 \leq 9$$

$$|x| \leq 3$$

$$-3 \leq x \leq 3$$

$$\text{και } x^2 - 5x + 6 \geq 0$$

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$		$+$	$-$	$+$

$$x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$$

β) $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$ και $x_0 = 1$

$$x^2 - 3x + 2 > 0$$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$		$+$	$-$	$+$

$$A = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$$

NAI

γ) $f(x) = \sqrt{5 - |2x - 3|}$ και $x_0 = -1$

$$5 - |2x - 3| \geq 0 \Leftrightarrow |2x - 3| \leq 5$$

$$-5 \leq 2x - 3 \leq 5 \Leftrightarrow -2 \leq 2x \leq 8$$

$$-1 \leq x \leq 4$$

$$A = [-1, 4]$$

NAI

ΑΡΑ $A = [-3, 2] \cup \{3\}$

ΟΧΙ

7.9 Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Να βρείτε όσα από τα παρακάτω όρια και τιμές υπάρχουν.

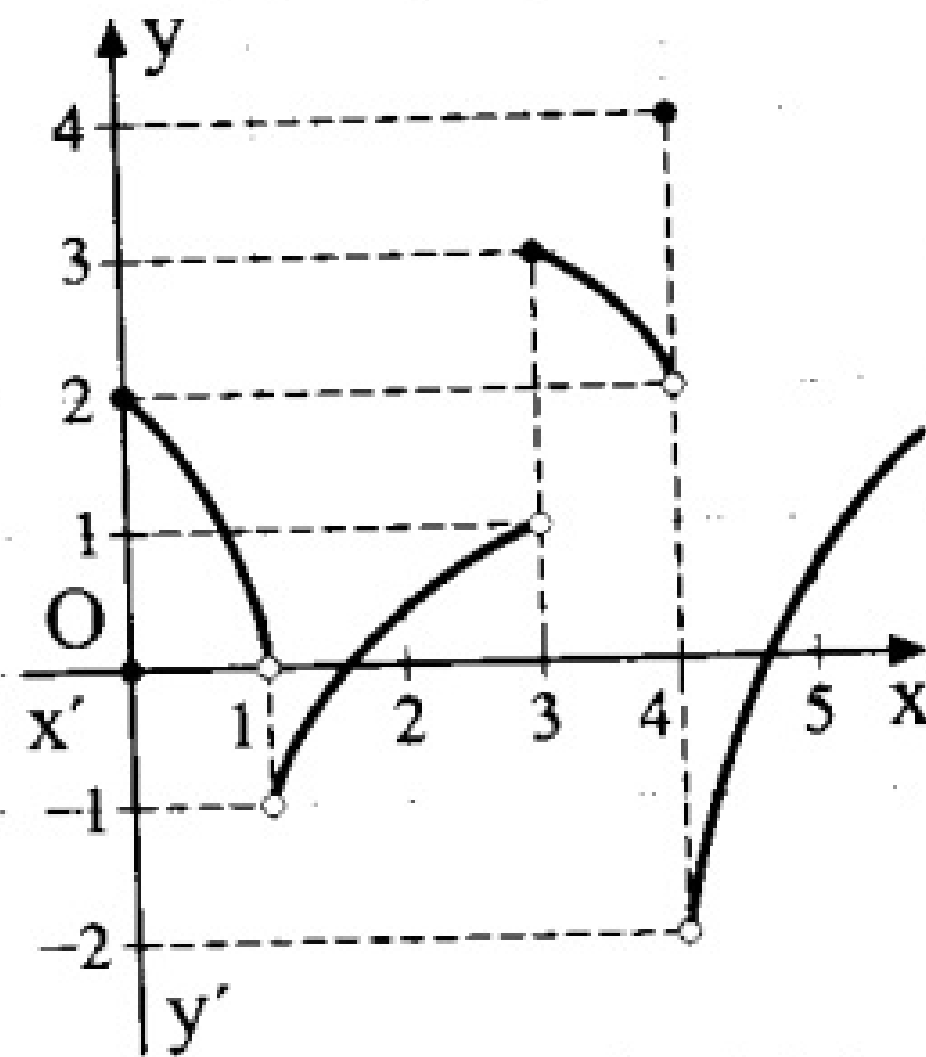
α) $f(0)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

β) $f(1)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$,

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

γ) $f(3)$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

δ) $f(4)$, $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$



7.9 Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Να βρείτε όσα από τα παρακάτω όρια και τιμές υπάρχουν.
 α) $f(0)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$A = [0, 1) \cup (1, +\infty) \text{ και } f(A) = (-2, 3] \cup \{4\}$$

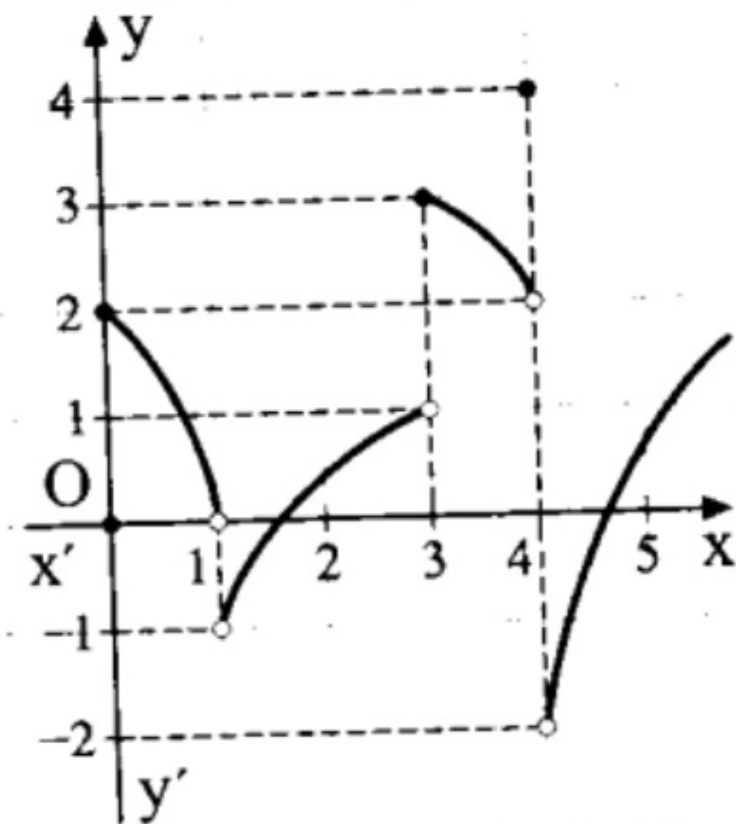
$$\alpha) f(0) = 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 \end{array} \right.$$

$$\beta) f(1) \text{ δεν ορίζεται} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0, \quad \nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

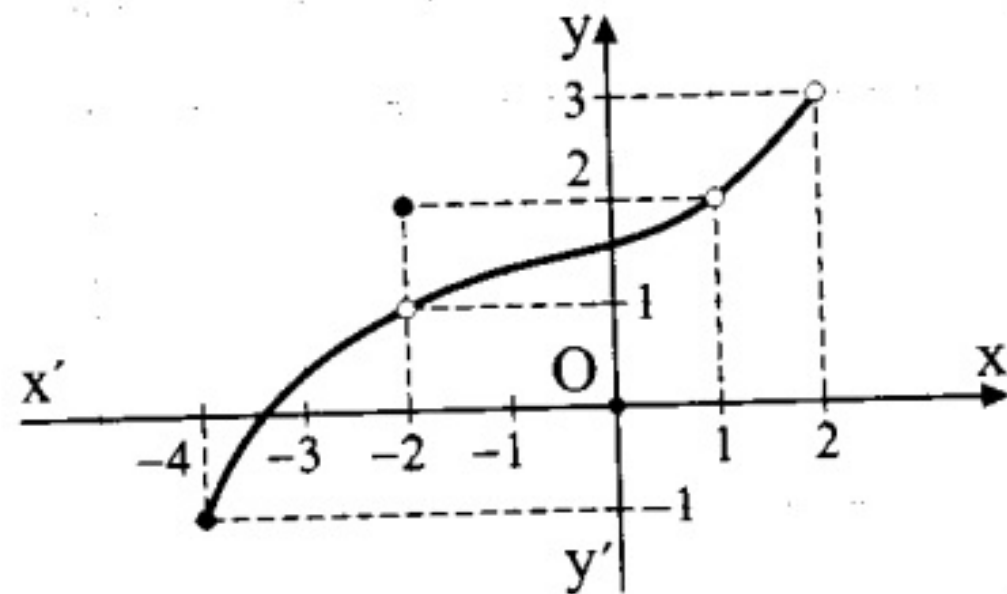
$$\gamma) f(3) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3, \quad \nexists \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

$$\delta) f(4) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = -2,$$

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 4} f(x)$$



7.10 Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



Να βρείτε:

- το πεδίο ορισμού της f ,
- όσα από τα παρακάτω όρια και τιμές υπάρχουν.

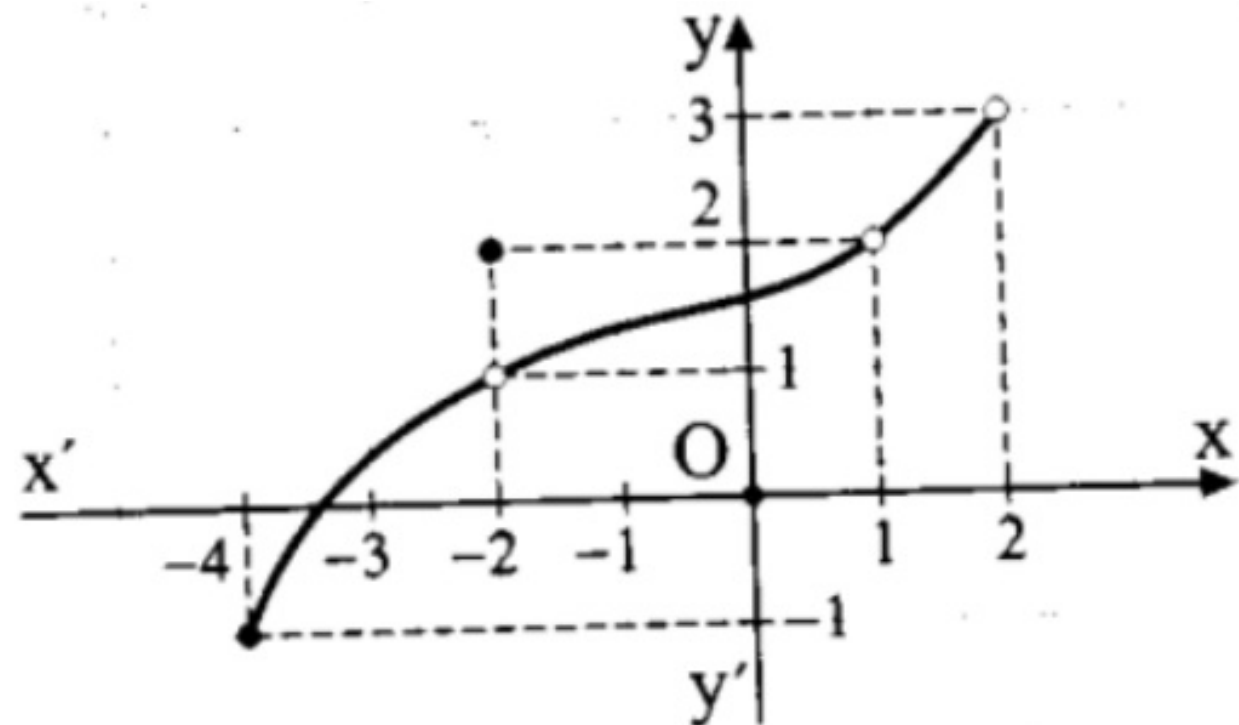
i) $f(-4)$ και $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$

ii) $f(-2)$ και $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

iii) $f(1)$ και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

iv) $f(2)$ και $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f



Να βρείτε
α) το πεδίο ορισμού της f

$$A = [-4, 1) \cup (1, 2)$$

β) όσα από τα παρακάτω όρια και τιμές υπάρχουν

i) $f(-4)$ και $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$

$$f(-4) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow -4} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = -1$$

ii) $f(-2) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 1$

iii) $f(1)$ δεν ορίζεται

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

iv) $f(2)$

δεν ορίζεται

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$$

7.13 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{αν } x \leq 1 \\ x + 1, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

- α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .
β) Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

7.13 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{αν } x \leq 1 \\ x + 1, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

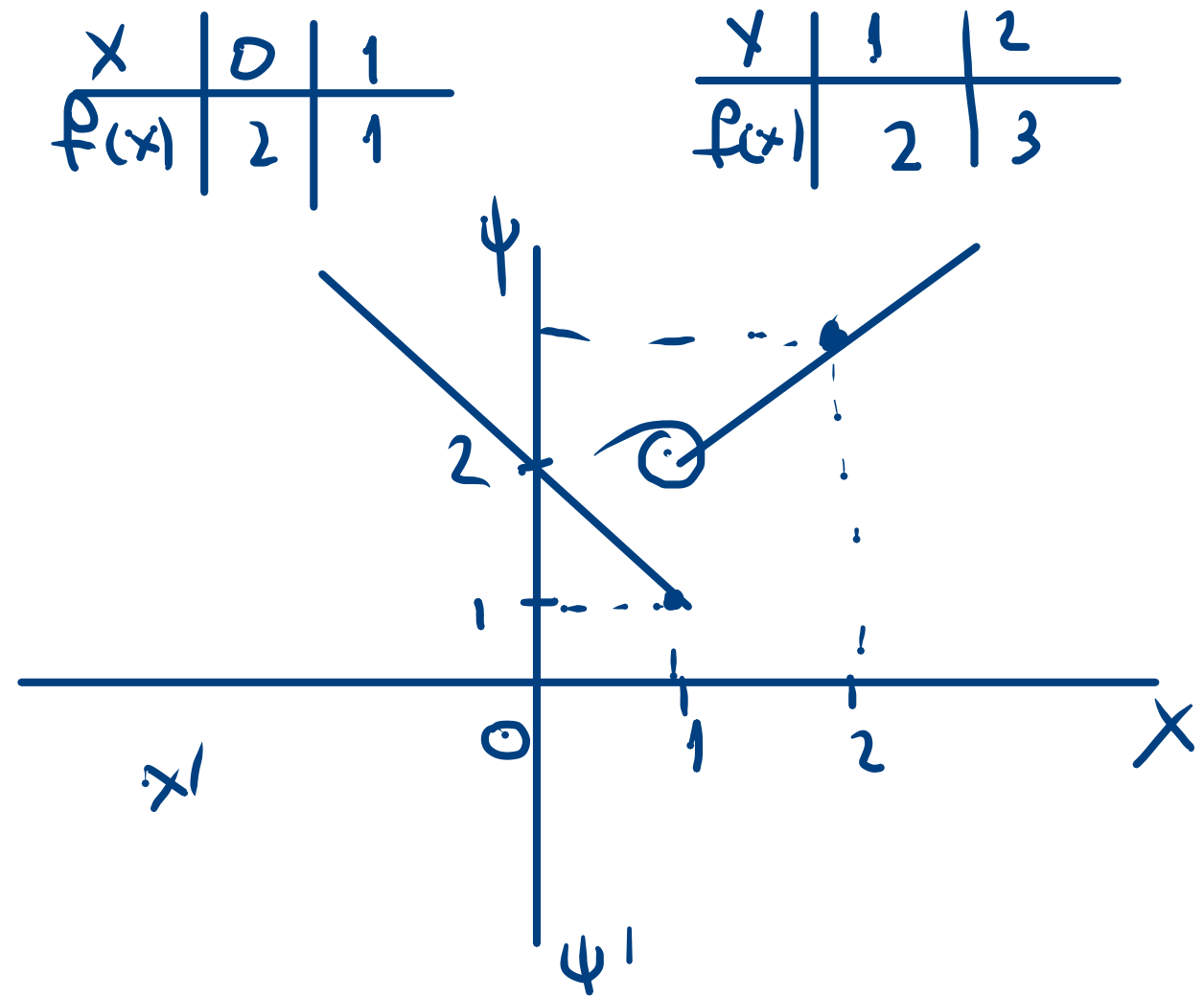
β) Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$$

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$



7.13 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{αν } x \leq 1 \\ x + 1, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

- α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .
β) Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

7.13 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{αν } x \leq 1 \\ x + 1, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

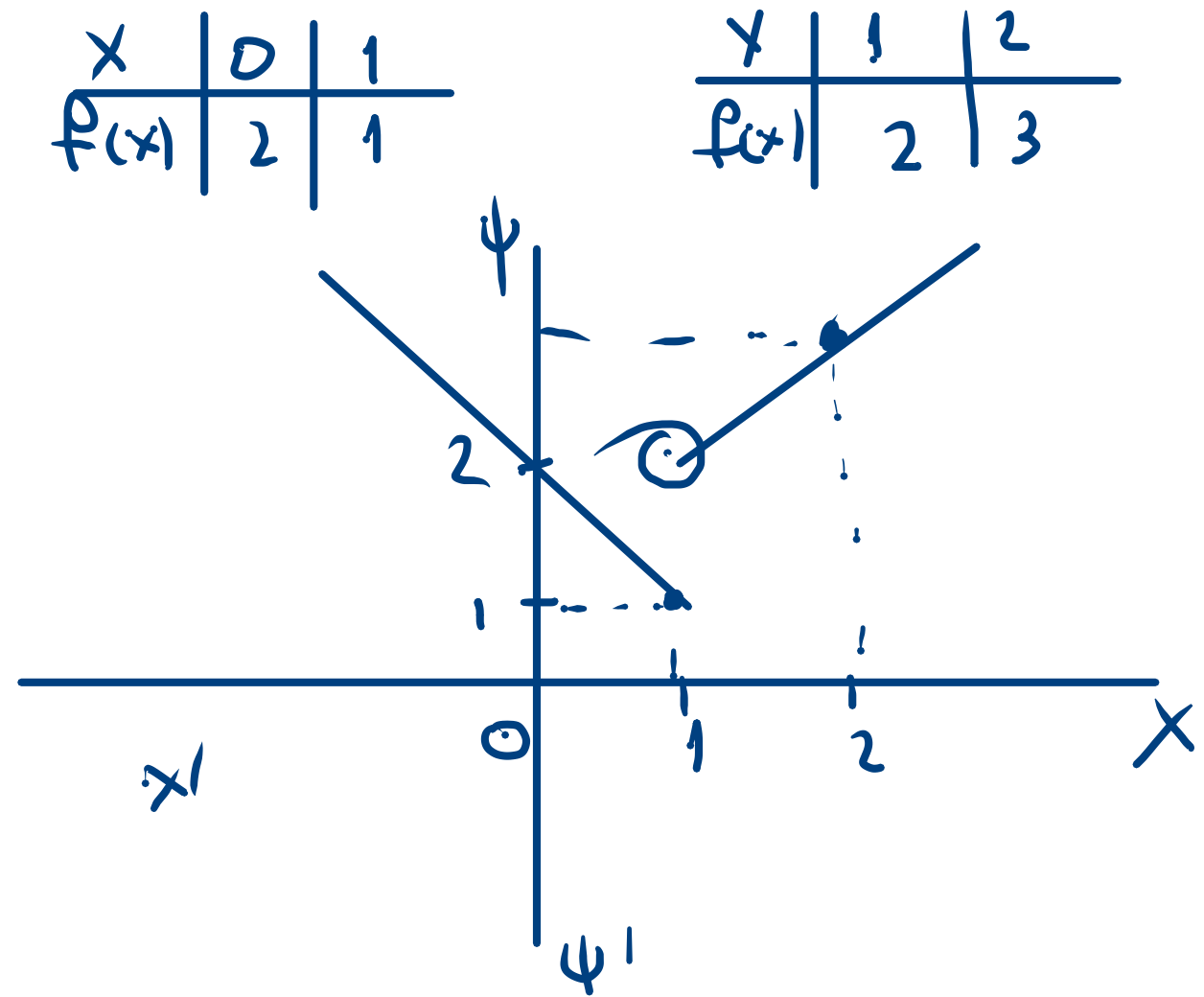
β) Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$$

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$



7.15 Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Αν ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lambda^3 - 4 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lambda(3\lambda - 4)$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, να βρείτε την τιμή του λ , ώστε να υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

7.15 Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Αν ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lambda^3 - 4 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lambda(3\lambda - 4)$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, να βρείτε την τιμή του λ , ώστε να υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad \text{δ'ρα}$$

$$\text{Ου} \quad \text{πρέπει} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

$$\text{Άρα} \quad \lambda^3 - 4 = \lambda \cdot (3\lambda - 4) \Leftrightarrow \lambda^3 - 4 = 3\lambda^2 - 4\lambda$$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda^2 - \lambda + 2) = 0$$

1	-3	4	-4	(2)
1	2	-2	4	
1	-1	2	0	

$$\lambda = 2 \rightarrow \lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$

$$\Delta = -7 < 0$$

7.16 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2\kappa + \lambda \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \kappa - 2\lambda$$

όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των κ και λ για τις οποίες ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$.

7.16 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2\kappa + \lambda \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \kappa - 2\lambda$$

όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των κ και λ για τις οποίες ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5.$$

θα προέπτει

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5$$

$$\text{Άρα } 2\kappa + \lambda = 5 \text{ και } \kappa - 2\lambda = 5$$

$$\begin{array}{r|l} 2\kappa + \lambda = 5 & \cdot 2 \\ \kappa - 2\lambda = 5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4\kappa + 2\lambda = 10 \\ \kappa - 2\lambda = 5 \\ \hline 5\kappa = 15 \\ \kappa = 3 \end{array}$$

$$2\kappa + \lambda = 5$$

$$6 + \lambda = 5$$

$$\lambda = -1$$